第 47 届国际大学生程序设计竞赛亚洲区域赛沈阳站

东北大学命题组

2022 年 11 月 6 日

A. Absolute Difference

- 首先不考虑某个集合中所有区间均退化的情况，实际上就是从集合 A 中选取一个区间 $S_1 = [l_1, r_1]$，从集合 B 中选取一个区间 $S_2 = [l_2, r_2]$，计算 $\int_{l_1}^{r_1} \int_{l_2}^{r_2} |x - y| \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ 加入到答案中，最终答案再除以两个集合各自区间长度之和的乘积。
- 如果 S_1 与 S_2 不 (严格) 相交，可以直接拆绝对值独立对 x 和 y 进行积分，推出公式后可以使用前缀和优化计算。否则可以分别将 S_1 与 S_2 拆分出相交部分和不相交部分，得到 1 对相同区间以及至多 3 对不相交区间进行计算，并且由于单个集合内部的区间都是不交的，相交的 S_1 与 S_2 只有 $O(n + m)$ 对，这部分可以直接计算。
- 对于某个集合之中所有区间均退化的情况，相当于从集合中若干个单点之中等概率随机选取一个，可以在预处理时根据是否集合中所有区间均退化对区间赋予一个 1 或者是区间长度的权值，复用不退化时的计算逻辑以降低实现难度。

B. Binary Substrings

- 首先分析不同子串的个数，由于长度为 i 的 01 串至多有 $\min(2^i, n-i+1)$ 个，因此不同子串的个数不超过 $\sum_{i=1}^{n} \min(2^i, n-i+1)$，特判 $n=1$，然后选取正整数 k 使得 $2^k+k-1 \le n < 2^{k+1}+(k+1)-1$，那么需要使所有 2^k 种长为 k 的 01 串都出现过，并且所有长为 $k+1$ 的子串都互不相同。
- 当 $n=2^k+k-1$ 时就是构造 de Bruijn 序列，构造方法是构建一张 2^{k-1} 个点的有向图，点从 0 到 $2^{k-1}-1$ 编号，每个点表示一个作为相邻两个长为 k 的串的公共部分的长为 $k-1$ 的串，对每个串分别向在结尾新增 0 或者 1 得到的新串的长为 $k-1$ 的后缀连有向边。这个图就是 de Bruijn 图，可以证明这个图上存在欧拉回路，求出一条欧拉回路就能构造出一个合法方案。

B. Binary Substrings

- 当 $n > 2^k + k - 1$ 时，需要扩展上述序列，先在 2^{k-1} 的图上找一条欧拉回路，这也是 2^k 的 de Bruijn 图上的哈密顿回路，将哈密顿回路上从 0 连出去的那条边断开就能得到一条哈密顿路径，沿着这条哈密顿路径可以遍历所有长为 k 的子串恰好一次。在 2^k 的 de Bruijn 图上删去这条路径之后从 0 出发找一条欧拉路径来扩展之前的路径，最好的情况是除了 $2^k - 1$ 的自环之外的边都能经过，这样就能构造出长为 $2^{k+1} + (k+1) - 2$ 的序列，截取长为 n 的前缀即可。值得注意的是，在删边之后原图可能分成了若干个弱连通分量从而得不到理论最长的序列，但是已经能求解 n 相对小的情况。

B. Binary Substrings

- 考虑使用另一个算法来尝试求解 n 相对大的情况，直接在 2^k 的 de Bruijn 图上跑一条欧拉回路，将 0 作为第一个出现的长为 k 的串来构造序列，找出包含所有长为 k 的本质不同子串的最短前缀，那么对于更大的 n 也是截取长为 n 的前缀即可。
- 在上述两个算法中求解欧拉回路时引入随机性（例如随机起点和随机出边的顺序）之后进行多次独立重复求解，不断贴近第一个算法能求解的最大 n 与第二个算法能求解的最小 n，期待最终能对特定的 k 求解所有满足 $2^k + k - 1 \leq n < 2^{k+1} + (k+1) - 1$ 的 n。由于不同的 k 只有 $O(\log n)$ 个，可以在本地验证不同随机数种子的运行效率以及最终得到的方案是否合法。

C. Clamped Sequence

- 显然 $r = l + d$，每个 $|a_i - a_{i+1}|$ 对答案的贡献是关于 l 的分段一次函数，可以枚举 $O(n)$ 个关键的 l 计算答案做到 $O(n^2)$ 的复杂度，也可以使用扫描线维护做到 $O(n \log n)$ 的复杂度。

D. DRX vs. T1

- 按题意模拟。

E. Graph Completing

- 首先对原图进行边双连通分量缩点，由于原图是连通的，缩点之后会得到一棵树。每加一条非树边 (u, v) 就会对 u 到 v 的树上路径进行覆盖，当所有树边都被覆盖的时候就得到了一个边双连通图。
- 考虑对树边是否被覆盖的情况进行容斥，枚举一定不会被覆盖的边集，删去这些边之后树上包含若干个连通块，只能在每个连通块内部任意连非树边。
- 使用动态规划计算这个容斥过程，$dp_{u,i}$ 表示以 u 为根的子树的连通块大小是 i 时子树内的方案数，转移时考虑一个子树 v 是否连上来，如果要连上那么可以在两个连通块之间任意连边并合并连通块，转移时第二维最多枚举到子树大小，可以证明时间复杂度是 $O(n^2)$。

F. Half Mixed

- 子矩形数量是 $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2}$，如果子矩形数量是奇数则显然无解，否则 $\frac{n(n+1)}{2}$ 和 $\frac{m(m+1)}{2}$ 至少有一个是偶数，不妨设 $\frac{m(m+1)}{2}$ 是偶数，尝试解决 $1 \times m$ 的问题然后堆叠 n 行。
- 对于 $1 \times m$ 的问题，子区间数量是 $\frac{m(m+1)}{2}$，记每一个同色段的长度分别是为 $l_1, l_2, \cdots, l_k$，那么纯色子区间个数就是 $\sum_{i=1}^{k} \frac{l_i(l_i+1)}{2}$，只需要找到一个方案使得满足下述两个条件即可：
  - $\sum_{i=1}^{k} l_i = m$
  - $\sum_{i=1}^{k} \frac{l_i(l_i+1)}{2} = \frac{m(m+1)}{4}$
- 使用贪心算法进行构造，每次取尽可能大的 l_i 即可。

G. Meet in the Middle

- 第一棵树上的点 u 到 v 的距离记为 $dis_1(u,v)$，同理第二棵树上的点 u 到 v 的距离记为 $dis_2(u,v)$。
- 考虑对询问离线，在第一棵树上 dfs 询问点 a，然后假设在第二棵树上每个点 j 挂一个新点 j' 且边权为 $dis_1(a,i)$，问题转化为在第二棵树加点得到的新树上查询 b 的最远点，这一定是新树上的任意一条树直径的两端点之一。

G. Meet in the Middle

- 考虑如何维护新树的直径，对第一棵树的 dfs 序建线段树，每个线段树节点维护第一棵树上 dfs 序在区间内的所有点 i 对应第二棵树上的点集直径，但是不具体维护直径长度，当 a 在第一棵树上移动时，在某个 dfs 序区间内点 i 对应的 $dis_1(a,i)$ 会整体加减一个值，区间外也会整体加减一个值，只需要沿着 dfs 区间在线段树上走的同时触发区间点集直径的更新即可，未触发更新的区间只是区间内 $dis_1(a,i)$ 整体加减一个值并不会改变直径，对于查询 (a,b) 只需要查询新树上的直径然后枚举端点 j' 用对应的 j 计算 $dis_1(a,j)+dis_2(b,j)$ 并更新答案即可。
- 使用欧拉 dfs 序和 ST 表支持 LCA 查询进而支持树上路径长度查询，时间复杂度是 $O(n\log n+q)$。

H. P-P-Palindrome

- 根据回文串的 border 也是回文串，可以分析出能拼接成 P-P-Palindrome 的两个回文子串 P 和 Q 一定需要具有相同的最小循环节。由于回文串的循环节一定是 border，也一定也是回文串。
- 如果一个回文串的最小循环节是 R 且循环了 k 次，那么所有的 $R, R^2, R^3, \ldots, R^k$ 都是合法的回文子串。
- 使用 manacher 或者回文树提取所有本质不同的回文子串，然后使用 hash 等方法按照回文串长度从小到大依次求出最小循环节，即可统计答案。

I. Quartz Collection

- 由于总和是固定的，可以看成每种石头先选的收益是 $b_i - a_i$，后选的收益为 0。
- 显然对于正收益的都想尽可能早选到收益大的，对于负收益的都想尽可能晚选到亏损大的。
- 按照 $b_i - a_i$ 从大到小排序后，可以确定每个位置上的石头会被哪方先选，使用值域线段树或者平衡树维护修改即可。

J. Referee Without Red

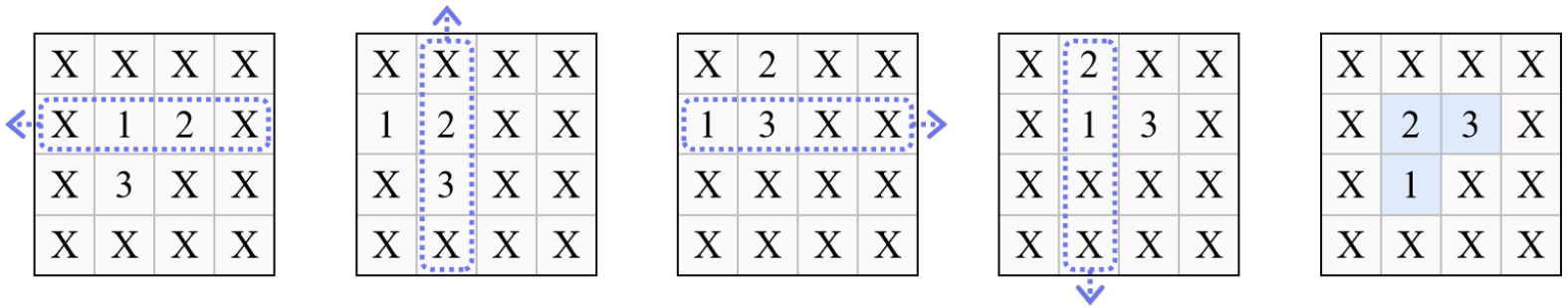
- 按行的置换能拆分成若干个轮换，因此可以交换列使同个轮换的列连续地排成一组，这样置换等价于每组内同时循环移位，按列的置换同理。设行列分别有 n', m' 组，考虑新矩阵由此划分出的 $n' \times m'$ 个矩形盘面。
- 从大小为 1 的组入手，其涉及的盘面长或宽为 1，要产生不同方案只能朝单一方向循环移位。单个盘面的答案等于最小周期，可以用 KMP 算法求解，整个盘面的方案数则为所有这些盘面的 LCM。

J. Referee Without Red

- 对于长宽均大于 1 的盘面，称所有数互异的为“互异盘面”，反之为“非互异盘面”。可以发现：
  - 各盘面包含的数永远进不到其他盘面。
  - 多次置换能实现逆元，因此循环移位有上下左右四种方向。
  - 定义互异盘面的奇偶性为所有数以固定方式生成序列（如从上到下顺次拼接）的逆序对奇偶性，显然交换任意两个数都会改变奇偶性，因此一次循环移位改变奇偶性当且仅当其移了偶数个数。

J. Referee Without Red

- 于是可以推测，互异盘面能在不变动其他盘面的条件下得到任意奇偶性不变的排列方案，非互异盘面能直接得到任意排列方案。证明只需如图实现 L 形三数轮换（L 形方向、轮换方向取决于操作顺序），逐个复位直至剩下两个数即可。



J. Referee Without Red

- 总体上先通过若干次循环移位锁定各互异盘面的奇偶性，再调整各盘面内部的方案。若长或宽为偶数，互异盘面的奇偶性可变，但碍于循环移位必须同步，同组行列盘面的奇偶性可能受之影响。
- 例如，大小为奇数的组，其与大小为偶数的组交叉形成的盘面只能同时改变奇偶性，方案数为 2。
- 再如，给大小为偶数的组分配虚点，它们交叉形成的互异盘面为相应的虚点连边，这些盘面的奇偶性方案数即为 2 的生成森林边数次幂。
- 结合乘法原理，分别统计全局的奇偶性方案数，并用组合相关知识计算各盘面内部的方案数乘出最终答案，时间复杂度能做到 $O(nm)$。

K. Security at Museums

- 问题即为选取至少两个简单多边形的顶点，使得选取的顶点之间两两连线都完全落在简单多边形内部（含边界），可以发现由于简单多边形是单连通区域，选取的顶点构成的凸包内部（不含边界）不能有其他顶点。
- 首先预处理出任意两个顶点间连线是否在简单多边形内部，如果连线与某条边严格有交，那么一定不在多边形内部，否则在连线内部找一个简单多边形上的顶点递归划分连线直到连线内部没有任何顶点，此时只需要检查连线中点是否在简单多边形内部，记忆化之后这部分的时间复杂度是 $O(n^3)$。

K. Security at Museums

- 然后枚举选取的顶点之中坐标 (x, y) 字典序最小的，不考虑字典序更小的点，将两两之间的合法连线按照极角序排序，按照极角序不减的顺序选一些连线首位尾相连之后可以得到一个凸包，对应的凸包顶点就是一组可行的方案。由于存在共线的情况，为了避免来回走重复计算的情况，要求要么只在一个极角上选边，要么至少选出三种不同极角的边。
- 这样在事先对所有边进行极角排序之后，每次枚举一个起点 s，记 $dp_{i,j}$ 表示从 s 出发沿着 i 种极角的边走到了 j，这里 i 只需要记录到 3，然后根据边的极角序做分组背包即可，需要注意同一组边的枚举顺序以避免漏算多次沿组内的边走的方案，这部分的时间复杂度也是 $O(n^3)$。

L. Tavern Chess

- 酒馆战旗规则，所有随从都是初始生命等于攻击的水桶腰身材，可以发现任何两个随从对撞时至少有一个被击倒。
- 递归遍历所有可能的局面，遍历到的局面最多是 $(7!)^2$。

- 每个结点建立线性基表示能异或出的数集，然后要求出所有树上 d 级邻域的线性基交。不难发现对于同个结点，随着 d 的增大，线性基交的张成只会不断取子空间且最多变化 $\log W$ 次，但是问题在于如何维护每次剥离的基。
- 考虑一个孪生问题：树上邻域的线性基并。对于各基底，额外维护一个值表示 d 至少多大才能并入线性基，若基底能直接被当前结点异或出则该值为 0。使用树上 dp 可以在 $O(n \log^2 W)$ 的时间复杂度内得到每个点 $O(\log W)$ 个线性基每次并入的基。对所有线性基查询最大值，总时间复杂度仍是 $O(n \log^2 W)$。

- 可以将“剥离”转换成“并入”吗？
- 不妨引入集合幂级数描述线性基，其第 x 位为 $1/0$ 取决于 x 是/否在线性空间内。两线性基 A, B 并的幂级数 C，等于各自幂级数 xor 卷积再除以同个基数相关值后的结果，记作 $C = \frac{1}{k}(A \oplus B)$，亦作 $\mathrm{FWT}(C) = \frac{1}{k}(\mathrm{FWT}(A) * \mathrm{FWT}(B))$（$*$ 即点值乘法）。注意到 $\mathrm{FWT}(A)$ 描述的实际是其正交补，令表示该正交补的线性基为正交线性基 $A^{\perp}$，则点值乘法实际上计算了 $A^{\perp}, B^{\perp}$ 的交。反过来，多个线性基交等价于多个正交线性基并，就转化成了孪生问题。

- 求正交线性基的复杂度 $O(\log^2 W)$，查询时不可能把每个邻域的线性基都正交回来。
- 在正交线性基中把每个基都存在最低位，这样利用 $x \in A, y \in A^{\perp} \Rightarrow |x\&y| \bmod 2 = 0$ 能直接在正交意义下贪心，总时间复杂度是 $O(n \log^2 W)$。

Thank you!